ФГБОУ ВПО «БРЯНСКЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

ЗАДАЧИ

на теоремы теории вероятностей (методические указания)

для студентов-бакалавров по направлению 280700 – Техносферная безопасность по дисциплине «Высшая математика»

БРЯНСК 2012

УДК 519.2(07):331.8(07)
ББК 22.171:65.9(2)248
З 38

Захаров, И. П. Задачи на теоремы теории вероятностей: методические указания/ И. П. Захаров. - Брянск.: Издательство Брянской ГСХА, 2012.-61 с.

Методические указания содержат подробно решенные задачи на теоремы сложения и умножения вероятностей на примерах техногенной и экологической безопасности предприятий, способствующие повышению качества усвоения материала студентами направления 280700 – Техносферная безопасность при самостоятельной работе по теории вероятностей в соответствии с требованиями ФГОС-3 (2009 г.)

Рецензент: д.т.н., профессор Л. Н. Маркарянц

Рекомендовано к изданию методической комиссией инженерно-технологического факультета БГСХА от 14 ноября 2012г., протокол №4.

Содержание

§1. Основные сведения

В реальной практике ожидаемые события и явления A могут происходить или не происходить (случаться или не случаться). При этом в зависимости от практических условий (условий опыта) о каком-то событии A говорят, что оно равновозможно другому событию B, или же что оно обладает большей возможностью появления (более возможно), чем другое. Это свидетельствует о том, что возможность события A допускает количественную оценку, т.е. может быть исчислена. Меру P, исчисляющую возможность события A, называют вероятностью события A и обозначают P(A).

При изучении общих свойств этой меры P (вероятности), вообще говоря, не требуется никакого знания о причинах, вызывающих событие A. Поэтому от рассмотрения и учета таких причин в дальнейшем отвлекаются (абстрагируются), информируя об этом читателя тем способом, что к термину «событие» иногда прибавляют слово «случайное», получая равносильный термин «случайное событие».

1.1. Теоретико-множественное моделирование вероятностных задач

В теории вероятностей задачи реальных опытов моделируют, подбирая подходящее множество $\Omega = \{\omega\}$(**пространство элементарных событий**), элементы ω которого (**элементарные события** или элементарные исходы) изображают основные (простейшие) исходы опыта. Далее выделяют некоторый класс $\widetilde{A}$ подмножеств $A \subset \Omega$ такой, что:

1. $\Omega \in \widetilde{A}$.

2. Если $\{A_n\}$ есть последовательность множеств из Ω, каждое класса $\widetilde{A}$, то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \widetilde{A} \quad \text{и} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \widetilde{A}.$$

3. Если $A \in \widetilde{A}$, то $\overline{A} \in \widetilde{A}$.

Эти выделенные подмножества A (составляющие класс $\widetilde{A}$), и только они, называются **событиями** (случайными событиями). С их помощью изображают все возможные исходы испытаний, связанные с данной задачей. Таким образом, не всякое, вообще говоря, подмножество $A \subset \Omega$ будет носить название «событие».

Само множество Ω называют **достоверным** событием в данной модели. Множество $\varnothing$, не содержащее ни одного элемента из Ω, называют **невозможным** событием в данной модели.

Например, результаты испытаний с подбрасыванием кубика, грани которого занумерованы цифрами от 1 до 6, можно смоделировать пространством $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, где, например, ω_5 означает элементарное событие, изображающее выпадение «пятерки». В класс $\widetilde{A}$ можно включить все подмножества $A \subset \Omega$. Тогда подмножество $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \subset \Omega$ изображает событие, состоящее в выпадении четной цифры (четной грани). При этом событие A считается наступившим, если результатом испытания (подбрасывания кубика) стало одно из элементарных событий ω, входящих в A. Таким образом, появление события A происходит за счет появления отдельных его элементов ω.

События A и B называют **равными** (эквивалентными, равносильными) и записывают A=B, если каждый элемент ω одного из них является элементом другого. В реальной ситуации считают, что A=B, если при наступлении одного из них всегда происходит и второе.

Часто для наглядности множество Ω изображают в виде некоторой геометрической фигуры (кривой линии, области на плоскости, пространственного тела или просто нескольких точек пространства). При этом элементарные события ω изображаются точками, а события A, B,…, - частями фигуры Ω (рисунок 1а).

Суммой A+B+C нескольких событий называется событие, состоящее из всех тех элементарных событий ω, которые принадлежат хотя бы одному из слагаемых A, B, C (рисунок 1б). В реальной ситуации сумма A+B+C считается наступившей, если выполнено хотя бы одно из условий A, B, C.

Произведением ABC нескольких событий A, B, C называется событие, состоящее из всех тех элементарных событий ω , которые принадлежат всем сомножителям A, B, C (рисунок 1в). В реальной ситуации произведение считается наступившим, если выполнены все условия: и A, и B, и C.

Разностью A-B событий A и B называется событие , состоящее из всех тех элементарных событий ω, которые входят в A, но не входят в B (рисунок 1г).

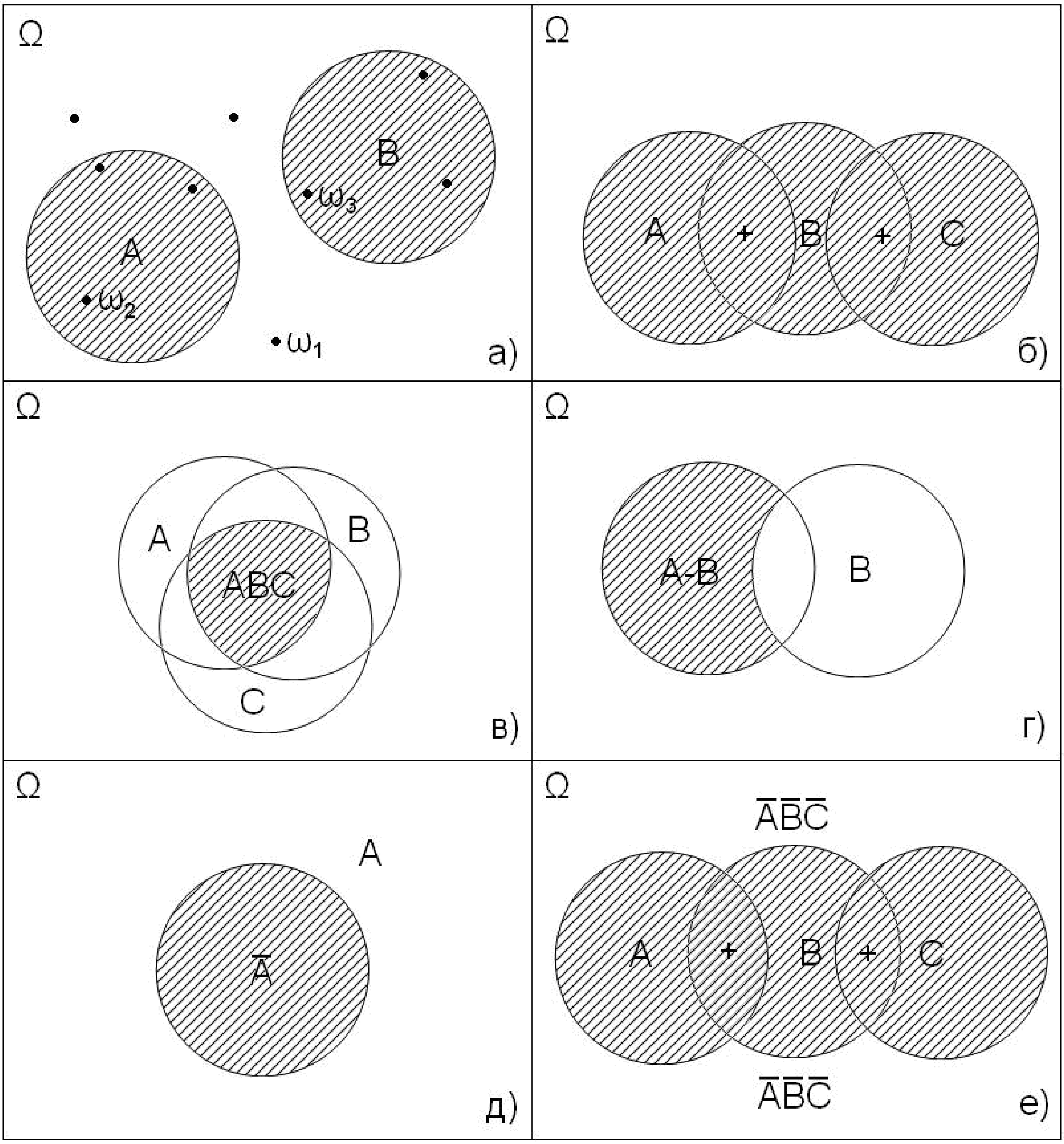

Рисунок 1 – Геометрическая интерпретация событий

Событие $\bar{A} = \Omega - A$ называется **противоположным** событию A (рисунок 1д). Очевидно, что $A + \bar{A} = \Omega$ и $A\bar{A}$=∅. Логически $\bar{A}$ («не A») означает полное **отрицание** условия A, при этом $\bar{\bar{A}} = A$. Нетрудно убедиться, что отрицание суммы равно произведению отрицаний:

$$\overline{(A+B+C+D+...)} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} \cdot ..., \qquad (1)$$

и отрицание произведения равно сумме отрицаний:

$$\overline{ABCD...} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D} + ... \qquad (2)$$

События A и B называются **несовместными**, если они не имеют общих элементов ω, т.е. AB=Ø. Если же они имеют общие элементы (т.е. $AB \neq Ø$), то называются **совместными**. На рисунке 1а) события A и B несовместны. На рисунке 1б) A и C несовместны, однако A и B совместны; также совместны B и C. Очевидно, что A и $\overline{A}$ всегда несовместны.

1.2. Конструктивные способы задания вероятности P(A)

Если пространство $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i, ..., \omega_n\}$ состоит из конечного числа n элементов ω_i и каждому элементу ω_i, $i = \overline{1,n}$, присвоено неотрицательное число $p_i = P(\omega_i)$ (вероятность события ω_i) так, что

$$p_1 + p_2 + ... + p_i + ... + p_n = 1, \qquad (3)$$

то **вероятность** P(A) события $A \subset \Omega$ полагают равной

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i). \qquad (4)$$

Если, в частности, множество Ω состоит из n равновозможных (т.е. в отношении которых нет оснований полагать, что одно из них более возможно, чем другое) элементарных событий, то в силу (3) будем иметь $P(\omega_i) = p_i = 1/n,\ i = \overline{1,n}$, и тогда для события А, содержащего ровно k элементов ω_i (которые называются «**благоприятствующими**» событию А), из (4) получим:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n}. \tag{5}$$

Этот случай равновозможных элементарных событий называется «классическим», и, таким образом, **классической вероятностью** P(A) события A называется отношение k(A)/n числа k(A) элементарных событий, «благоприятствующих» появлению A, к общему числу n всех элементарных событий в Ω, т.е.

$$P(A)=\frac{k(A)}{n}. \tag{6}$$

Иногда приходится рассматривать пространства $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i, ...\}$, состоящие из счетного (а значит бесконечного) числа элементов с числовым рядом

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_i) + ... = p_1 + p_2 + ... + p_i + ... = 1,$$

$$p_i \ge 0,\ i = \overline{1,\infty}. \tag{7}$$

В этом случае также полагают

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i). \tag{8}$$

Если пространство Ω является геометрической фигурой (и тогда события A – её части), то определяют **геометрическую** вероятность P(A) события A по формуле:

$$P(A)=\frac{\text{мера}(A)}{\text{мера}(\Omega)}, \tag{9}$$

где мера (A) в простейших случаях означает либо длину, либо площадь, либо объем множества A.

При проведении многократных испытаний определяют **статистическую** вероятность P(A) события A по формуле

$$P(A)=\lim_{m\to\infty}\frac{m(A)}{m}, \tag{10}$$

где m – число всех произведенных испытаний, m(A) – число испытаний, в которых событие A произошло и $\frac{m(A)}{m}=W(A)$ - **относительная частота** события A в серии из m испытаний.

Если число m произведенных испытаний велико, то приближенно можно принять

$$P(A)\approx W(A)=\frac{m(A)}{m}. \tag{11}$$

Во всех случаях (4)-(11) вероятность P(A) указывает на «долю» события A (во всем пространстве Ω). Иногда «долю» выражают в процентах. Сообразно этому, слова «уверенность в выполнении условия А равна 70%» или «надежность утверждения А равна 70%» надо понимать как «вероятность события А равна 0,7».

1.3. Свойства вероятности P(A)

1) $$P(\varnothing)=0 \le P(A) \le 1 = P(\Omega), \tag{12}$$

где А – произвольное событие из Ω;

2) Если $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$.

3) $$P(A+B)=P(A)+P(B) - P(AB), \tag{13}$$

где A,B - произвольные события (совместные или несовместные);

4) Вероятность появления хотя бы одного события из четырех произвольных:

$$P(A+B+C+D)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)-P(AB)-P(AC)-P(AD)-P(BC)-$$
$$-P(BD)-P(CD)+P(ABC)+P(ACD)+P(ABD)+P(BCD)-P(ABCD). \tag{14}$$

5) Если события A_i и A_j, $i \ne j$, $i,j = \overline{1,n}$, попарно несовместны (т.е. $A_i A_j = \varnothing$ при $i \ne j$), то

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_i + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_i) + \ldots + P(A_n); \tag{15}$$

6) $$P(A) = 1 - P(\overline{A}); \; P(\overline{A}) = 1 - P(A); \; P(A) + P(\overline{A}) = 1. \tag{16}$$

При решении задач часто удобно вычислить вероятность противоположного события $\overline{A}$, а затем по формуле (16) вычислить вероятность данного события A.

События A и B называются **независимыми,** если

$$P(AB)=P(A)P(B). \tag{17}$$

Если P(A)=0, то при любом B события A и B будут независимыми (как нетрудно это увидеть из (17)).

Независимость событий A и B ценна тем, что удается очень просто вычислять вероятность P(AB) произведения AB, если известны P(A) и P(B).

Если $P(A) \neq 0$, то определяют **условную** вероятность $P_A(B)$ события B при условии A:

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}. \tag{18}$$

Условная вероятность $P_A(B)$ обладает теми же свойствами, что и (безусловная) вероятность P(B). Если P(A)>0, то независимость A и B эквивалентна равенству

$$P_A(B) = P(B). \tag{19}$$

В свою очередь, чтобы установить (19), надо прежде вычислить условную вероятность $P_A(B)$. В конкретных задачах это зачастую удается сделать без явного использования формулы (18) методом нового оценивания вероятности события B с учетом того, что A уже произошло. Более того, если в ходе такого нового оценивания становится понятным, что вероятность любого из двух событий A и B не меняется от того, произошло уже или нет еще другое событие, то сразу делают вывод о независимости A и B (без вычисления $P_A(B)$ и $P_B(A)$).

Например, если при одновременном бросании двух кубиков событие A – выпадение какой-либо грани на первом кубике, событие B – выпадение какой-то грани на втором кубике, и P(A) – классическая вероятность, то вполне ясно, что события A и B независимы.

Если равенство (17) не выполняется, то события A и B называются **зависимыми.** У зависимых событий при P(A)>0 будет $P_A(B) \neq P(B)$, т.е. появление события A изменяет вероятность события B.

7) Если события A и B – произвольны (зависимы или независимы) и $P(A) \neq 0$, то:

$$P(AB)=P(A)P_A(B). \qquad (20)$$

8) Аналогично, для четырех произвольных событий будем иметь:

$$P(ABCD)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)\cdot P_{ABC}(D). \qquad (21)$$

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются независимыми в совокупности (или просто независимыми), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Если $A_1, A_2, ..., A_n$ – независимые в совокупности события, то при замене нескольких из них $A_i, A_j, A_k, ...$ на противоположные $\overline{A}_i, \overline{A}_j, \overline{A}_k, ...$, получим новый набор независимых в совокупности событий. В частности, события $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$ будут независимыми в совокупности.

Для независимых в совокупности событий справедливы формулы (22) и (23):

9) $$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n), \quad (22)$$

10) $$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P\left(\overline{(A_1 + A_2 + ... + A_n)}\right) =$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2...\overline{A}_n) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)...P(\overline{A}_n). \quad (23)$$

Формула (23) часто используется при нахождении вероятности суммы независимых событий (т.е. вероятности появления хотя бы одного события из данной группы A_1, A_2,…, A_n независимых событий).

Формулы (13)-(16) образуют группу теорем сложения вероятностей. К этой группе примыкает формула (23). Формулы (17) и (20)-(22) называют теоремами умножения вероятностей.

11) Если $\Omega = H_1 + H_2 + ... + H_n$, события (гипотезы) H_i, $i = \overline{1, n}$, несовместны и $P(H_i) > 0$, $i = \overline{1, n}$, то для произвольного события $A \subset \Omega$ справедлива формула полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + ... + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A). \quad (24)$$

Теоретико-множественный подход к определению операций над событиями (суммы, произведения, разности, отрицания) вместе с простой по структуре согласованностью вероятности P с этими операциями (формулы сложения и умножения вероятностей) служат надежной основой для построения ясного и логически стройного решения вероятностных задач. Приведенные и разобранные ниже задачи на применение формул сложения и умножения вероятностей призваны помочь формированию у студентов прочных навыков математического мышления, используя при этом интерес к вопросам избранного профиля, а также приобретению навыков применения математического аппарата к моделированию и решению типовых проблем профильного характера.

В приводимых задачах при помощи условного сигнала I поступающего на элемент схемы, изображается предъявляемое к элементу требование осуществить свои рабочие функции, и этот элемент может либо «сработать», либо «отказать» (выйти из строя). Это же касается и участка цепи или всей схемы (прибора). Например, если штатная работа схемы состоит в проводке через нее сигнала, а она сигнал не пропустила, то схема считается «отказавшей».

Во всех задачах способность элементов «срабатывать» или «отказывать» считается независимой (если только не оговорено противное) от состояния других элементов. Из этого следует, что такие события, как отказы элементов, независимы в совокупности. Независимыми в совокупности надо считать (если не оговорено противное) и безотказные срабатывания элементов при поступлении на них сигналов. **Надежностью** элемента (схемы, прибора) назовем вероятность его безотказной работы. При этом, если безотказность понимать в смысле безопасности, то есть работы без возникновения опасных ситуаций, то понятие «безопасности» становится частным случаем понятия «надежности». Таким образом, под «безопасностью» мы будем понимать вероятность работы элемента или протекания процесса без порождения им «опасной» ситуации. Тогда вероятность появления «опасной» ситуации можно называть риском ситуации.

Далее принято: p – надежность (безопасность) элемента, q – вероятность отказа (риск) элемента, P – надежность (безопасность) устройства (ситуации), Q – вероятность отказа устройства (схемы, прибора).

Очевидно, что:

$$p+q=1; \quad p=1-q; \quad q=1-p; \quad P+Q=1; \quad P=1-Q; \quad Q=1-P. \qquad (25)$$

Встречающиеся на практике инженерные системы имеют многообразные графы (схемы) конструктивных и технологических соединений своих элементов. При этом и условия сохранения работоспособности и безопасности всей системы (схемы) многоразличны: от условия сохранения работоспособности (безопасности) непременно каждым элементом до условия сохранения работоспособности (безопасности) лишь некоторыми элементами, или даже хотя бы одним. Сообразно этому и способы расчета безопасности (надежности) системы могут меняться.

В предлагаемом издании формулы (17) и (22) могут интерпретируются на примерах последовательного соединения элементов в конструктивную или технологическую цепочку (которая, как часто случается на практике, может выполнить свои функции при условии, что непременно (одновременно) сохраняют работоспособность или безопасность все установленные в ней элементы); а формулы (13), (14), (15) и (23) часто интерпретируются на схемах параллельного соединения рабочих элементов (когда система может выполнять данную инженерную задачу, если сохраняют работоспособность или безопасность хотя бы некоторые элементы, или даже хотя бы один элемент). Такая интерпретация употреблена только из понятных соображений удобств и упрощений.

Задачи повышенной трудности отмечены в тексте звездочками *.

§2. Последовательное соединение

2.1. Методические указания

В данном параграфе схема считается безопасно работающей, если безопасно работают все установленные в ней элементы.

Задача 1

В целях пожарной безопасности в помещении устроены два независимых друг от друга выхода. Вероятность того, что при пожаре удастся воспользоваться первым выходом равна p_1=0,9; для второго выхода эта вероятность составляет p_2=0,8. Какова вероятность P того, что при пожаре оба выхода будут использованы? Ни одним выходом воспользоваться не удастся? Построить структурно-логическую схему задачи.

Решение.

Решение задачи начинают с обозначения событий:

Событие A – первый выход будет использован.

Событие B – второй выход будет использован.

Событие AB (произведение) –оба выхода будут использованы.

Так как события A и B независимы, то по формуле (17) получим:

а) $P = P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72$.

Событие $\overline{A}$ - первым выходом воспользоваться не удастся.

Событие $\overline{B}$ - вторым выходом воспользоваться не удастся.

Событие $\overline{A} \cdot \overline{B}$ - ни одним выходом воспользоваться не удастся.

Тогда в силу независимости событий $\overline{A}$ и $\overline{B}$ по формуле (17) получим:

б) $Q=P(\overline{A} \cdot \overline{B})=P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = (1-P(A)) \cdot (1-P(B)) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02.$

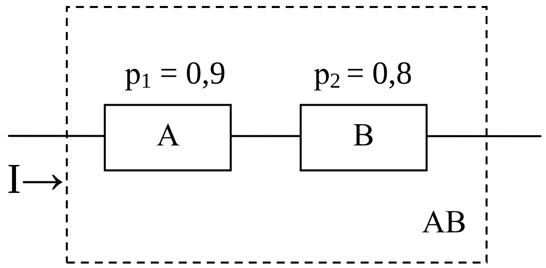

Схема 1а – Структурно-логическая схема п.а) задачи 1

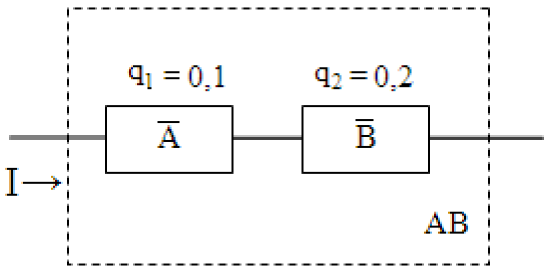

Схема 1б - Структурно-логическая схема п.б) задачи 1

Ответ: P = 0,72; Q = 0,02

Задача 2

Вероятность p_1 правильного выбора транспортного средства для перевозки данного груза составляет 0,97. Вероятность p_2 правильной погрузки и закрепления составляет 0,95. Вероятность p_3 соблюдения путевой инструкции во время перевозки равна 0,92. Какова вероятность P безопасной перевозки (показатель безопасности) данного груза, если все другие условия считать выполненными?

Решение.

Рассмотрим случайные события:

A - транспортное средство подобрано верно.

B –погрузка и закрепление груза на борту выполнены верно.

C – инструкция по перевозке соблюдается.

ABC – все условия A, B, C выполнены (то есть перевозка груза будет безопасной).

Так как события A, B, C можно считать независимыми в совокупности, то по формуле (22) получаем:

$P = P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}97 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}92 = 0{,}84778$.   Ответ: $P = 0{,}84778$.

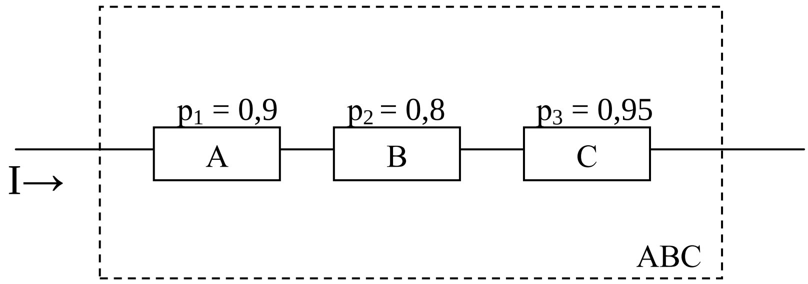

Схема 2 – Структурно-логическая схема задачи 2

Задача 3

В условиях задачи 2 безопасность перевозки могут нарушить прочие случайные причины, вероятность появления которых $q_4=0{,}1$. Какова вероятность P проведения безопасной перевозки в этом случае?

Решение.

Если случайное событие D – появление прочих помех, то $\overline{D}$ – прочих помех не будет и событие $ABC\overline{D}$ означает, что перевозка груза будет безопасной.

С учетом того, что $p_4 = P(\overline{D}) = 1 – P(D) = 1 - q_4 = 0,9$;

из формулы (22) получаем:

$P = P(ABC\overline{D}) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)\cdot P(\overline{D}) = p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4 = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,95 \cdot 0,9 \approx 0,763$

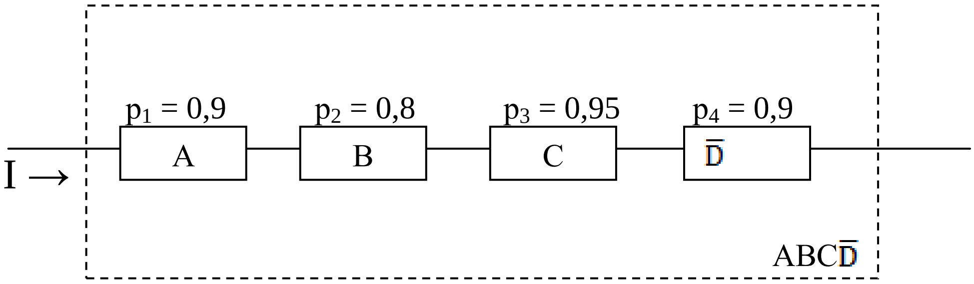

Схема 3 – Структурно-логическая схема задачи 3

Ответ: P = 0,763

Задача 4

На момент проведения контроля К инспекцией I состояния рабочих мест предприятия на предмет его аттестации, в подразделении R имелось 90% готовых к аттестации рабочих мест, а в подразделении Л – 95% готовности. Инспекция I наудачу выбирает по одному рабочему месту подразделений R и Л и дает заключение об их готовности. Какова вероятность P аттестации A предприятия, если для этого необходима аттестованность всех его подразделений? Готовности R и Л не зависят друг от друга.

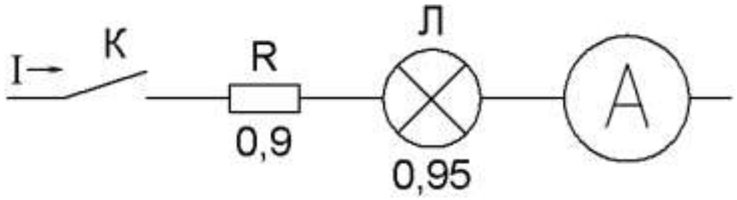

Схема 4

Решение.

Из условия задачи ясно, что аттестация предприятия эквивалентна аттестованности обоих его подразделений R и Л.

Введем обозначения событий:

Событие В – подразделение R будет аттестовано.

Событие С – подразделение Л будет аттестовано.

Событие А – предприятие будет аттестовано.

По условию $P(B)=p_1=0{,}9$; $P(C)=p_2=0{,}95$.

Тогда по смыслу произведения событий, событие ВС означает, что оба подразделения R и Л будут аттестованы.

Поскольку событие А оказывается эквивалентным событию ВС, то вероятности их равны: $P(A)=P(BC)$, а поскольку события В и С независимы, то по формуле (17) находим:

$$P=P(A)=P(BC)=P(B)\cdot P(C)=p_1\cdot p_2=0{,}9\cdot 0{,}95=0{,}855.$$

Ответ: $P=P(A)=0{,}855$.

Задача 5

Вероятности безопасной работы агрегатов R_1, R_2, R_3 технологической линии на схеме 5 равны соответственно $p_1=0{,}95$, $p_2=0{,}92$, $p_3=0{,}9$. Какова вероятность Р безопасной работы линии в целом? Какова вероятность Q возникновения опасной ситуации? Отказ каждого агрегата (в отношении безопасности) считать независимым от состояния других агрегатов.

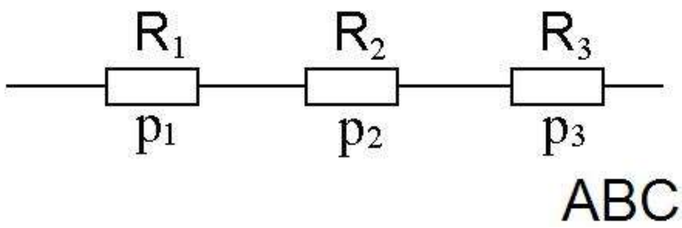

Схема 5

Решение.

Введем обозначения событий:

A –агрегат R_1 работает безопасно.

B – агрегат R_2 работает безопасно.

C – агрегат R_3 работает безопасно.

ABC – все агрегаты работают безопасно.

Поскольку A, B, C – независимые в совокупности события, то безопасность всей линии на схеме 5 эквивалентна одновременной безопасной работе всех ее агрегатов, и по формуле (22) получаем:

$$P = P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}95 \cdot 0{,}92 \cdot 0{,}9 = 0{,}7866$$

Тогда вероятность Q возникновения опасной ситуации равна:

$$Q=1-P=1-p_1 \cdot p_2 \cdot p_3=1-0{,}7866=0{,}2134.$$

Ответ: P=0,7866; Q=0,2134.

Задача 6

В схеме 6, проводящей сигнал I, соединены последовательно n независимых элементов R_i, $i = 1,2,...,n$ с надежностями работы p_i, $i = 1,2,...,n$. Вычислить надежность P схемы и показатель ее отказов Q, если вся схема считается работающей только при условии, что работают все ее элементы.

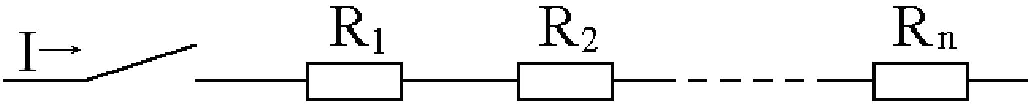

Схема 6.

Решение.

Поскольку для срабатывания схемы необходимо срабатывание сразу всех ее элементов, то по формулам (22) и (25) получаем:

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n; \quad Q = 1 - P = 1 - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n.$$

Задача 7

Эвакуационный маршрут в случае пожара (схема 5) последовательно включает коридор R_1, лестничный марш R_2 и выход R_3. Вероятности выхода из строя этих элементов (вероятности отказов, блокирования) при пожаре равны соответственно q_1=0,1; q_2=0,05; q_3=0,15. Вычислить надежность P маршрута и вероятность Q выхода его из строя.

Маршрут считается вышедшим из строя, если вышел из строя (блокирован) хотя бы один из его элементов: R_1, R_2, R_3.

Решение.

Введем обозначения событий:

A – срабатывание элемента R_1 (проход по коридору свободен);

$\overline{A}$ – отказ элемента R_1;

B – срабатывание элемента R_2 (лестничный марш свободен);

$\overline{B}$ – отказ элемента R_2;

C – срабатывание элемента R_3 (выход свободен);

$\overline{C}$ – отказ элемента R_3;

Тогда ABC – срабатывание всех элементов (а значит срабатывание всего маршрута).

Вычисляем надежности элементов схемы:

$$p_1 = P(R_1) = P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - q_1 = 1 - 0{,}1 = 0{,}9;$$

$$p_2 = P(R_2) = P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - q_2 = 1 - 0{,}05 = 0{,}95;$$

$$p_3 = P(R_3) = P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - q_3 = 1 - 0{,}15 = 0{,}85.$$

Надежность P всего маршрута на схеме 5 - это вероятность срабатывания маршрута, т.е. вероятность P(ABC) срабатывания всех элементов. По условию, события A, B, C – независимы в совокупности. По формуле (22) получим:

$$P = P(ABC) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C) = p_1\cdot p_2\cdot p_3 =$$

$$= 0{,}9\cdot 0{,}95\cdot 0{,}85 = 0{,}72675 \approx 0{,}727.$$

По формуле (25) получим: $Q=1-P \approx 1-0{,}727 = 0{,}273$.

Ответ: $P \approx 0{,}727$; $Q \approx 0{,}273$.

Заметим, что здесь $P=(1-q_1)(1-q_2)(1-q_3)$ и

$$Q = 1 - P = 1 - p_1\cdot p_2\cdot p_3 = 1-(1-q_1)(1-q_2)(1-q_3).$$

Задача 8

Найти показатель безопасности P и показатель риска Q схемы 6, если даны показатели рисков (вероятности отказов) $q_1, q_2, \dots, q_n$ ее элементов.

Решение.

Поскольку для показателей безопасности элементов имеем $p_i=1-q_i$, $i=\overline{1,n}$, то для безопасности P схемы при помощи (22) получаем:

$$P = p_1\cdot p_2\cdot \ldots \cdot p_n = (1-q_1)\cdot(1-q_2)\cdot\ldots\cdot(1-q_n),$$

а для показателя риска Q схемы будем иметь:

$$Q=1-P=1-(1-q_1)\cdot(1-q_2)\cdot\ldots\cdot(1-q_n).$$

Задача 9

Схема 7 составлена из пяти одинаковых и независимых элементов. Какова должна быть техническая надежность p отдельных элементов, чтобы техническая надежность всей схемы равнялась бы P_0? Схема считается работающей, если работают все ее элементы.

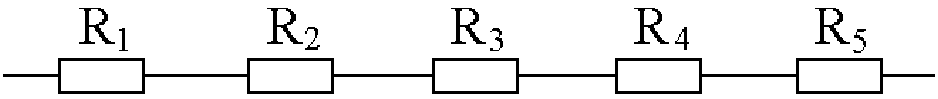

Схема 7

Решение.

Поскольку $P_0=p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4\cdot p_5=p^5$, то $p=\sqrt[5]{P_0}$.

Ответ: $p=\sqrt[5]{P_0}$.

Задача 10

Схема 8 составлена из пяти независимых в совокупности элементов, из которых первый R_1 имеет техническую надежность p_1=0,99, а остальные сменные элементы однотипны и обладают одинаковой вероятностью безотказной работы (надежностью) p. Каково должно быть число p, чтобы вся схема обладала надежностью P не менее 95%? Схема считается работающей, если работают все ее элементы.

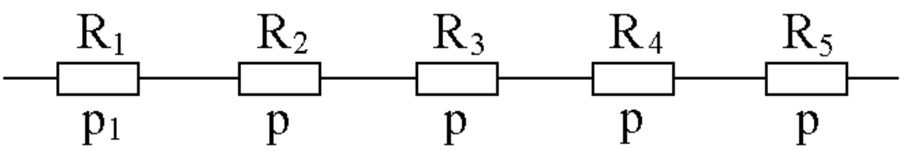

Схема 8

Решение.

Вычислим надежность схемы 7:

$$P=0{,}99p^4.$$

По условию $P \ge 0{,}95$, т.е.:

$$0{,}99 \cdot p^4 \ge 0{,}95;\ p^4 \ge \frac{0{,}95}{0{,}99} = \frac{95}{99};\ \ p \ge \sqrt[4]{\frac{95}{99}} = 0{,}9897.$$

Ответ: $p \ge 0{,}9897$.

Задача 11

Пять независимых в совокупности элементов соединены по схеме 9. Надежность элемента R_1 в смысле его безопасной работы равна p_1=0,98. Остальные сменные элементы однотипны и показатели их рисков (вероятности опасной работы) равны $q_2=q_3=q_4=q_5=q=0{,}03$. Можно ли их устанавливать в схему 8, если требуется, чтобы надежность (безопасность) P схемы была не менее 95% (0,95)? Схема считается безопасно работающей, если безопасно работают все ее элементы.

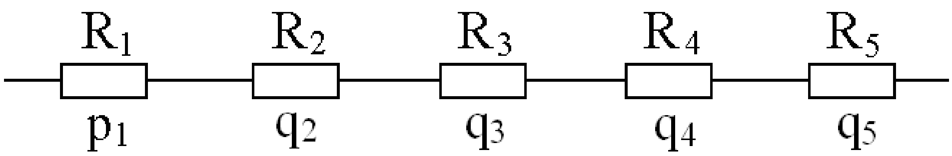

Схема 9.

Решение.

Надежности элементов R_2-R_5 равны:

$$p_i=1-q_i=1-q=1-0{,}03=0{,}97.$$

Схема 8 с такими элементами будет иметь надежность P, в смысле ее безопасной работы, равную:

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 = 0{,}98 \cdot (0{,}97)^4 \approx 0{,}86759.$$

Поскольку получили $P \approx 0{,}86759 < 0{,}95$, то элементы R_2-R_5 с рисками q=0,03 устанавливать в схему нельзя.

Задача 12

С каким показателем отказов q нужно выбрать однотипные элементы R_2-R_5, чтобы вместе с R_1, имеющим надежность p_1=0,98, вся схема 9 имела бы надежность $\geq 0{,}95$?

Решение.

Показатели надежности p_i элементов R_2-R_5 будут равняться:

$$p_i = 1 - q_i = 1 - q,\ i = \overline{2,5}.$$

Тогда надежность P схемы равна:

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 = p_1 \cdot p^4 = p_1 \cdot (1-q)^4 = 0{,}98 \cdot (1-q)^4.$$

Поскольку требуется, чтобы $P \geq 0{,}95$, то получаем:

$$0{,}98 \cdot (1-q)^4 \geq 0{,}95;\ (1-q)^4 \geq \frac{0{,}95}{0{,}98} = \frac{95}{98};\ 1 - q \geq \sqrt[4]{\frac{95}{98}} \approx 0{,}99226;$$

т.е. 1-q$\geq 0{,}99226$(заметим, что надежность таких элементов будет $p \geq 0{,}99226$); $q \leq 1 - 0{,}99226 = 0{,}00774$.

Ответ: $q \leq 0{,}00774$.

2.2 Задачи для самостоятельного решения

Задача 13

При данных задачи 4 найти вероятность Q неаттестации данного предприятия.

(Ответ: Q=0,145)

Задача 14

В условии задачи 4 принять готовность R равной 0,8, а готовность Л равной 0,7. Найти надежность P аттестационного мероприятия и риск Q неаттестации.

(Ответ: P=0,56; Q=0,44)

Задача 15

В условии задачи 4 (схема 4) надежность (готовность) подразделения R составляет 0,95, а риск q неаттестации Л равен 0,2. Найти P и Q предприятия.

(Ответ: P=0,76; Q=0,24)

Задача 16

На схеме 4 риски неаттестации подразделений R и Л равны q_1=0,03 и $q_Л$=0,02. Найти P и Q схемы.

(Ответ: P=0,9506 Q=0,0494)

Задача 17

Решить задачу 6 с четырьмя элементами R_i, $i=\overline{1,4}$, обладающими надежностями p_1=0,99; p_2=0,98; p_3=0,97; p_4=0,96.

(Ответ: P=0,90345024; Q=0,09654976)

Задача 18

Решить задачу 8 с четырьмя элементами $R_i = \overline{1,4}$, вероятности отказов которых (риски) равны q_1=0,001; q_2=0,002; q_3=0,003; q_4=0,004.

(Ответ: $P \approx 0{,}99003;\ Q \approx 0{,}00997$)

Задача 19

На схеме 7 для R_1 дано p_1=0,995; для R_2 дано q_2=0,015. Остальные три элемента обладают одинаковой надежностью p. В каких границах заключается p, если от схемы требуется $P \geq 0{,}95$?

(Ответ: $0{,}9897 \leq p \leq 1$)

Задача 20

На схеме 7 все пять элементов R_i, $i = \overline{1,5}$ имеют одинаковую вероятность отказа q. В каких границах заключено число q, если вся схема имеет показатель отказа $Q \leq 0{,}01$?

(Ответ: $0 \leq q \leq 0{,}002$)

Решить задачи 21-30 и построить их структурно-логические схемы

Задача 21

Вероятность того, что на предприятии обеспечена пожарная безопасность равна p_1 = 0,97; вероятность обеспечения радиационной безопасности равна p_2 = 0,94. Какова вероятность P того, что на предприятии обеспечены оба вида безопасности?

(Ответ: P=0,9118)

Задача 22

Вероятности того, что выборочно инспектируемое предприятие применило: а) организационно-правовые; б) финансово-экономические; в) материально-технические меры и механизмы охраны окружающей среды равны соответственно p_1=0,98; p_2=0,95; p_3=0,9. Какова вероятность (надежность) Р того, что все меры приняты? Вероятность Q_3 того, что ни одна мера не принята?

(Ответ: Р=0,8379; Q_3=0,0001)

Задача 23

При контроле К инспекцией I технического вида безопасности, закрепленного ФЗ РФ «О техническом регулировании», на поточной линии некоторого предприятия (схема 3) вероятности безопасной работы (надежности в отношении безопасности) агрегатов R_1, R_2 и R_3 составили соответственно p_1=0,95; p_2=0,96; p_3=0,97. Какова вероятность Р безопасной работы (показатель безопасности) линии на схеме 3 в целом? Каков показатель риска Q (отказ в безопасности) этой линии? Считать, что линия отказывает в безопасности, если хотя бы на одном агрегате возникает отказ в безопасности.

(Ответ: Р=0,8846; Q=0,11536)

Задача 24

В некоторых условиях для металлической конструкции вероятность подвергнуться электролитической коррозии, почвенной коррозии, электрокоррозии, атмосферной коррозии, контактной коррозии составляет соответственно q_1=0,3; q_2=0,4; q_3=0,2; q_4=0,5; q_5=0,15.

Какова вероятность Q_5 того, что случайно взятая конструкция подверглась всем перечисленным видам коррозии? Какова вероятность P того, что конструкция не подверглась ни одному виду коррозии?

(Ответ: $Q_5 = 0,0018$; $P = 0,1428$).

Задача 25

Вероятность сообщения прессой в любой день об очередной аварии q_1=0,15; катастрофе q_2=0,1; стихийном бедствии q_3=0,05; криминальном происшествии q_4=0,6. Какова вероятность Q_4 сообщения в данный день обо всех этих бедствиях? Какова вероятность P того, что ни об одном из них сообщения не поступит?

(Ответ: $Q_4 = 0,00045$; $P = 0,2907$).

Задача 26

Эвакуация при пожаре происходит через коридор R_1 с вероятностью преодолеть его p_1=0,95; через лестничный марш R_2 с вероятностью прохождения его p_2=0,93 и выходную дверь R_3 с вероятностью прохода через нее p_3=0,98. Каков показатель безопасности P при эвакуации по данному маршруту (вероятность эвакуироваться)? Каков уровень риска Q прохождения по этому маршруту (вероятность не пройти по маршруту)?

(Ответ: P=0,86583; Q=0,13417).

Задача 27

Каков показатель первоочередной безопасности P автомобиля, если показатели опасных отказов (вероятности выхода из строя во время движения) наиболее ответственных систем: тормозной, рулевой, передней подвески и колес соответственно составляют: q_1=0,01; q_2=0,005; q_3=0,02; q_4=0,015?

(Ответ: P=0,951)

Задача 28

Если по наблюдениям из 360 дней в году, насчитывается дней, когда некий человек подвергался опасности: в быту – 20 дней; на производстве – 90 дней; в пути – 30 дней; на отдыхе – 6 дней; в других условиях обитания – 10 дней, то какова вероятность Q_5 того, что в данный случайно избранный день этот человек подвергался опасности во всех названных сферах? Вероятность Р того, что опасности в данный день человек не подвергался?

(Ответ: $Q_5 = 5 \cdot 10^{-7}$; Р = 0,62).

Задача 29

Если вероятность отказа: трубопроводов системы торможения q_1=0,001; любого из шести тормозных цилиндров $q_2=q_3=q_4=q_5=q_6=q_7$=0,001; главного тормозного цилиндра q_8=0,0009; вакуумного усилителя q_9=0,0015; недостатка тормозной жидкости q_{10}=0,0015; наличии воздуха в системе q_{11}=0,002; несвоевременного реагирования водителя q_{12} = 0,003; действия других причин q_{13}=0,002, то какова вероятность (надежность Р) безусловно эффективного торможения автомобиля?

(Ответ: Р≈0,9822)

Задача 30

Пусть степени риска q (то есть вероятности наступления несчастного случая или нежелательного происшествия в связи с наличием данного фактора) опасных и вредных бытовых факторов при проживании в обычной квартире одного человека составляют: электрического тока q_1=0,003; электромагнитного поля q_2=0,001; повышенного уровня радиации q_3=0,0002; токсических бытовых веществ q_4=0,001;

отравления пищевыми продуктами q_5=0,0025; отравления лекарствами q_6=0,0007; наличия пожароопасных горючих материалов q_7=0,002; газификации q_8=0,001; централизованного водоснабжения и канализации q_9=0,004; теплоснабжения q_{10}=0,0002; шума и вибрации q_{11}=0,001; механического травмирования q_{12}=0,001; высотности проживания q_{13}=0,0005; других факторов q_{14}=0,0015. Оценить, каков будет в целом минимальный риск Q_{min} (то есть число Q_{min} такое, что вероятность наступления несчастного случая под действием хотя бы одного фактора будет не менее этого числа) проживания одного человека в квартире с современными удобствами?

(Ответ: $Q_{min}\approx0,0194$)

§3. Параллельное соединение

3.1 Методические указания

В данном и следующем параграфах схему с параллельно соединенными ветвями считаем работающей (безопасной), если (безопасно) работает хотя бы одна ее ветвь (если не оговорено иное).

Задача 31

В целях пожарной безопасности в помещении установлены два огнетушителя: пенный и порошковый. Вероятность того, что при экстренной (пожарной) ситуации удастся воспользоваться первым огнетушителем равна p_1=0,9; для второго огнетушителя эта вероятность составляет p_2=0,8. Какова вероятность P того, что в экстренной ситуации можно будет воспользоваться хотя бы одним огнетушителем? Хотя бы одним огнетушителем воспользоваться не удастся?

Решение.

Решение задачи начинают с обозначения событий:

Событие А – первым огнетушителем можно будет воспользоваться.

Событие В – вторым огнетушителем можно будет воспользоваться.

Событие А+В – хотя бы одним огнетушителем можно будет воспользоваться.

Так как события А и В независимы, то с учётом (13) и (17) получаем:

$P=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot\cdot B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=p_1+p_2-p_1\cdot p_2=0{,}9+0{,}8-0{,}9\ 0{,}8=0{,}98$

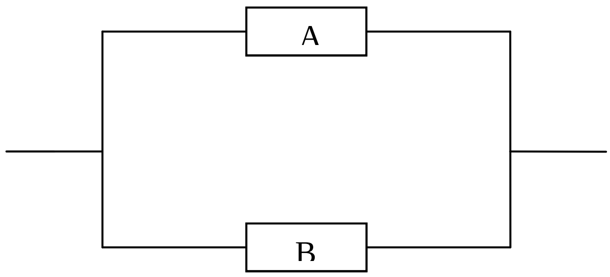

Схема 10.1 - Структурно-логическая схема пункта 1).

Событие $\overline{A}$ - первым огнетушителем воспользоваться не удастся.

Событие $\overline{B}$ - вторым огнетушителем воспользоваться не удастся.

Событие $\overline{A}+\overline{B}$ - хотя бы одним огнетушителем воспользоваться не удастся.

Так как события А и В независимы, то с учётом (13) и (17) и того, что $P(\overline{A})=1-P(A)=1-p_1=1-0{,}9=0{,}1$; $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0{,}8=0{,}2$, получим:

$P(\overline{A}+\overline{B})=P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cdot\overline{B})=P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0{,}1+0{,}2-0{,}1\ 0{,}2=0{,}28.$

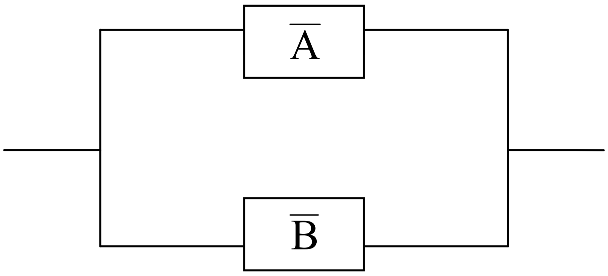

Схема 10.2 - Структурно-логическая схема пункта 2).

Ответ: 1) P=0,98; 2) 0,28.

Задача 32

На схеме 11 изображены два эвакуационных маршрута R_1 и R_2, работающие независимо друг от друга с надёжностями $p_1=0{,}9$ и $p_2=0{,}85$ соответственно. Какова надёжность P этой схемы эвакуации (вероятность срабатывания хотя бы одного её маршрута) и риск Q её полного отказа (вероятность блокирования обоих маршрутов)?

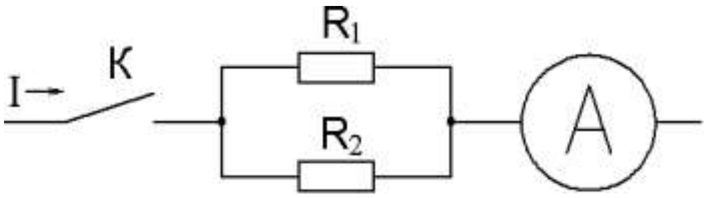

Схема 11- Структурно-логическая схема задачи 32

Решение.

Очевидно, схема будет считаться сработавшей, если сработает (не откажет) хотя бы один из маршрутов R_1 и R_2.

Введем обозначения событий:

B - маршрут R_1 сработает (не будет блокирован);

C - маршрут R_2 сработает (не будет блокирован);

G - схема сработает;

Тогда по смыслу суммы событий получим, что

B+C – хотя бы один маршрут сработает (не будет блокирован).

По теореме сложения вероятностей (13) получаем:

$$P(B+C)=P(B)+P(C)-P(B\cdot C), \qquad (28)$$

а поскольку B и C – независимы, то, согласно формуле (17),

$$P(B\cdot C)=P(B)\cdot P(C). \qquad (29)$$

С учетом (28) и (29) получаем:

$$P=P(G)=P(B+C)=P(B)+P(C)-P(B)\cdot P(C)=p_1+p_2-p_1\cdot p_2=$$

$$=0{,}9+0{,}85-0{,}9\cdot 0{,}85=0{,}985 \text{ (т.е. } 98{,}5\%);$$

$$Q=1-P=1-0{,}985=0{,}015 \text{ (т.е. } 1{,}5\%).$$

Ответ: $P=0{,}985$; $Q=0{,}015$.

Задача 33

На схеме 11 известны вероятности отказов (риски) $q_1=0{,}15$ и $q_2=0{,}20$ двух независимо срабатывающих элементов R_1 и R_2. Найти P и Q схемы.

Решение.

Введем обозначения событий:

$\overline{B}$ - откажет элемент R_1; $\overline{C}$ - откажет элемент R_2.

Тогда $\overline{B}\cdot\overline{C}$ - откажут одновременно оба элемента (что равносильно отказу $\overline{G}$ всей схемы).

Поскольку элементы R_1 и R_2 независимы друг от друга, то с учетом (17) получаем:

$$Q = P(\overline{G}) = P(\overline{B} \cdot \overline{C}) = P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) = q_1 \cdot q_2 = 0{,}15 \cdot 0{,}20 = 0{,}03,$$

$$P=1-Q=1-q_1 \cdot q_2=1-0{,}15 \cdot 0{,}20=1-0{,}03=0{,}97. \qquad (30)$$

Ответ: Q=0,03; P=0,97.

Задача 34

На схеме 11 надежность (безопасность) элемента R_1 равна p_1=0,95, а вероятность q_2 отказа элемента R_2 равна 0,15. Найти P и Q схемы, если элементы ее работают независимо друг от друга.

Решение:

Найдем прежде Q.

Пусть B – срабатывание R_1; $\overline{B}$ - отказ R_1;

C – срабатывание R_2; $\overline{C}$ - отказ R_2;

$\overline{B} \cdot \overline{C}$ - отказ обоих элементов; $\overline{G}$ - отказ схемы.

Тогда с учетом (25) получим:

$$Q = P(\overline{G}) = P(\overline{B} \cdot \overline{C}) = P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) = q_1 \cdot q_2 = (1 - p_1)q_2 =$$

$$= (1 - 0{,}95) \cdot 0{,}15 = 0{,}05 \cdot 0{,}15 = 0{,}0075, \text{ откуда:}$$

$$P = 1 - Q = 1 - 0{,}0075 = 0{,}9925.$$

Ответ: Q=0,0075; P=0,9925.

Задача 35

Для сигнализации об аварии в помещении установлены три сигнализатора A,B,C. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор равна p_1=0,7. Для второго и третьего сигнализаторов вероятности срабатывания, соответственно, равны $p_2=0,6$ и $p_3=0,5$. Какова вероятность того, что при аварии: 1)сработает хотя бы один сигнализатор (Р); 2)хотя бы один сигнализатор откажет? Работу сигнализаторов считать независимой друг от друга.

Решение.

Обозначим события:

А-первый сигнализатор сработает; $\bar{A}$-первый сигнализатор откажет;
В-второй сигнализатор сработает; $\bar{B}$- второй сигнализатор откажет;
С-третий сигнализатор сработает; $\bar{C}$- третий сигнализатор откажет.
А+В+С- сработает хотя бы один. $\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$-откажет хотя бы один.

Тогда $P(\bar{A})=1-P(A)=1-0,7=0,3=q_1$; $P(\bar{B})=1-P(B)=1-0,6=0,4=q_2$; $P(\bar{C})=1-P(C)=1-0,5=0,5=q_3$.

По формулам (22) и (23) получим:

1)$P(A+B+C)=1-P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})=1-0,3\ 0,4\ 0,5=1-0,06=0,94$.

2)$P(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})=1-P(\bar{\bar{A}})P(\bar{\bar{B}})P(\bar{\bar{C}})=1-P(A)P(B)P(C)=$
$=1-0,7\cdot 0,6\cdot 0,5=1-0,21=0,79$.

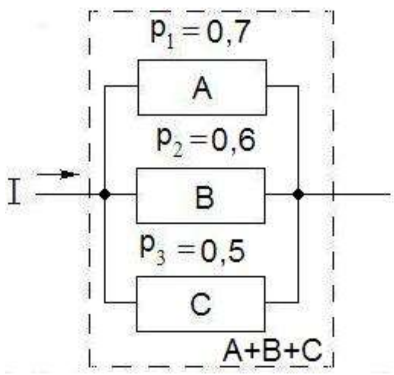

Схема 12- Структурно-логическая схема пункта 1).

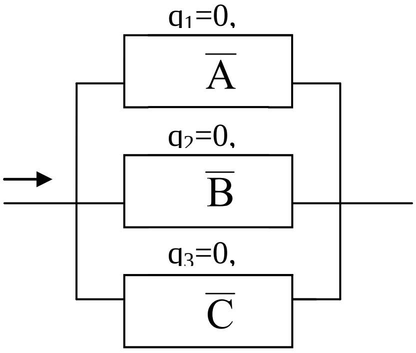

Схема 13- Структурно-логическая схема пункта 2).

Задача 36

На схеме 14 три независимых параллельно соединенных элемента R_i, i=1,2,3, имеют вероятности отказов q_1=0,10; q_2=0,11; q_3=0,12. Найти P и Q схемы.

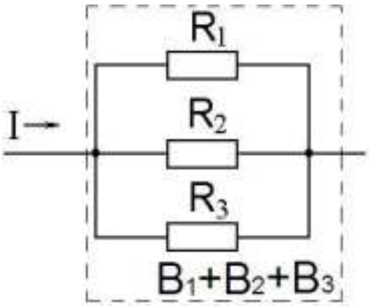

Схема 14.

Решение.

Найдем прежде вероятность (риск) отказа Q схемы 14.

Пусть B_1 – срабатывание R_1; $\overline{B}_1$- отказ R_1;

B_2 – срабатывание R_2; $\overline{B}_2$- отказ R_2;

B_3 – срабатывание R_3; $\overline{B}_3$- отказ R_3;

$B_1 + B_2 + B_3$ - срабатывание хотя бы одного элемента;

$\overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot \overline{B}_3$- отказ всех элементов;

G – срабатывание схемы. Очевидно, G=$B_1 + B_2 + B_3$.

$\overline{G}$ - отказ схемы.

Очевидно, отказ схемы $\overline{G}$ эквивалентен одновременному отказу $\overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot \overline{B}_3$ всех элементов R_i, $i=\overline{1,3}$. Поэтому:

$$Q = P(\overline{G}) = P(\overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot \overline{B}_3) = P(\overline{B}_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(\overline{B}_3) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 =$$

$$= 0{,}10 \cdot 0{,}11 \cdot 0{,}12 = 0{,}00132;$$

$$P = P(G) = 1 - P(\overline{G}) = 1 - Q = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 1 - 0{,}00132 = 0{,}99868.$$

Ответ: Q=0,00132; P=0,99868.

Задача 37

На схеме 14 три независимых элемента R_i, $i=\overline{1,3}$, имеют надежности (безопасности) $p_1=0{,}9$; $p_2=0{,}8$; $p_3=0{,}7$. Найти P и Q схемы.

Решение.

Обозначим события:

B_1 – срабатывание R_1; $\overline{B}_1$ - отказ R_1;

B_2 – срабатывание R_2; $\overline{B}_2$ - отказ R_2;

B_3 – срабатывание R_3; $\overline{B}_3$ - отказ R_3;

G – схема работает;

$\overline{G}$ - отказ схемы.

$B_1 + B_2 + B_3$ - срабатывание хотя бы одного элемента;

$\overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot \overline{B}_3$ - отказ всех элементов;

Так как $\overline{G} = \overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot \overline{B}_3$, и согласно (25), $q_i=1-p_i$, то

$$Q = P(\overline{G}) = P(\overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot \overline{B}_3) = P(\overline{B}_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(\overline{B}_3) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 =$$

$$=(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)=(1-0{,}9)(1-0{,}8)(1-0{,}7)=0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3=0{,}006,$$

$$P=P(G)=1-P(\overline{G})=1-Q=1-q_1\cdot q_2\cdot q_3=1-0{,}006=0{,}994\ (=99{,}4\%)..$$

Ответ: Q=0,006; P=0,994.

Задача 38

На схеме 14 дано q_1=0,1; q_2=0,2. Какова должна быть надежность p_3 элемента R_3, чтобы надежность P всего пакета параллельных элементов была бы не менее 0,99?

Решение.

Так как $Q=q_1\cdot q_2\cdot q_3$ и $P=1-Q=1-q_1\cdot q_2\cdot q_3$, то согласно условию задачи

$$P=1-q_1\cdot q_2\cdot q_3\geq 0{,}99;\ 1-0{,}99\geq q_1\cdot q_2\cdot q_3;\ 0{,}01\geq 0{,}1\cdot 0{,}2\cdot q_3;\ \frac{0{,}01}{0{,}1\cdot 0{,}2}\geq q_3;$$

$$0{,}5\geq q_3;\ q_3=1-p_3;\ \ 0{,}5\geq 1-p_3;\ p_3\geq 1-0{,}5=0{,}5.$$

Ответ: $p_3\geq 0{,}5$.

Задача 39

На схеме 14 дано q_1=0,1; q_2=0,2. Какова должна быть надежность p_3 элемента R_3, чтобы надежность P всего пакета параллельных элементов была бы не менее 98%?

Решение.

Воспроизводя решение задачи 38, получаем $p_3\geq 0$, т.е. на место R_3 годится любой элемент.

Задача 40

На схеме 14 три независимо друг от друга отказывающих элемента имеют одинаковые надежности p. Каково должно быть число p, чтобы надежность всего пакета была бы более 0,95?

Решение.

Так как q=1-p и $P=1-Q=1-q^3=1-(1-p)^3>0{,}95$, то $1-0{,}95>(1-p)^3$ и

$0{,}05>(1-p)^3$; $1-p<\sqrt[3]{0{,}05}\approx 0{,}3684$; 1-0,3684<p; 0,6316<p.

Ответ: p>0,6316.

3.2. Задачи для самостоятельного решения

Решить задачи 41-51 и построить их структурно-логические схемы.

Задача 41

Решить задачу 31, в которой надежности $p_1=0{,}96$ и $p_2=0{,}85$.

(Ответ: 1) P=0,994; 2) 0,006).

Задача 42

На схеме 11 известны риски (вероятности) отказов $q_1=0{,}3$ и $q_2=0{,}4$ двух независимо друг от друга срабатывающих элементов R_1 и R_2. Рассчитать безопасность P и риск Q схемы.

(Ответ: Q=0,12; P=0,88)

Задача 43

На схеме 11 безопасность элемента R_1 равна 0,98, а вероятность опасного отказа элемента R_2 равна 0,3. Найти безопасность P и риск Q схемы, если ее элементы работают независимо друг от друга.

(Ответ: Q=0,006; P=0,994)

Задача 44

На схеме 11 надежность элемента R_1 равна $p_1=0{,}98$. Какова должна быть вероятность отказа q_2 элемента R_2, чтобы в среднем из 1000 случаев замыкания ключа К для пропуска сигнала I в 999 попытках схема срабатывала?

(Ответ: $q_2\leq 0{,}05$)

Задача 45

На схеме 11 вероятность отказа q_1 элемента R_1 равна 0,16. Какова надежность p_2 элемента R_2, если в 196 случаях из 200 замыканий ключа К для пропуска сигнала I схема срабатывает?

(Ответ: p_2=0,875)

Задача 46

На схеме 14 элементы R_i, $i=\overline{1,3}$, срабатывают независимо друг от друга. Риски опасных отказов первых двух элементов равны q_1=0,21; q_2=0,22, а уровень безопасности третьего p_3=0,87. Найти вероятность P безопасного срабатывания схемы.

(Ответ: P=0,989)

Задача 47

На схеме 14 дано: q_1=0,13; q_2=0,14. Какова должна быть надежность p_3 элемента R_3, чтобы надежность P всей схемы была бы не менее 0,999?

(Ответ: $p_3 \geq 0{,}9451$)

Задача 48

Пакет изготавливается из трех параллельно соединенных элементов R_i, i=1,2,3, с одинаковой годовой надежностью p.

Известно, что в среднем из 125 установленных пакетов через год их работы годными остаются 117 (пакет считается годным, если в его составе работает хотя бы один из элементов R_i). Приблизительно найти годовую надежность p элементов R_i.

(Ответ: $p \approx 0{,}6$)

*** Задача 49**

Пакет изготовляют из четырех параллельно соединенных одинаковых независимо работающих элементов R_i, $i=\overline{1,4}$, каждый с безопасностью p=0,9. Пакет способен выполнять свои функции, если в нем сохраняют безопасную работоспособность хотя бы 2 элемента. Найти безопасность P пакета.

(Ответ: P=0,9963)

Задача 50

При перевозке пестицидов вероятность (риск) q_1 неправильного выбора транспортного средства составляет 0,03. Вероятность (риск) q_2 неправильной погрузки и закрепления груза составляет 0,05. Вероятность (риск) q_3 несоблюдения путевой инструкции во время перевозки равна 0,08. Какова вероятность Q совершить хотя бы одну из этих ошибок (риск Q ошибки)? Все другие требования перевозки считать выполненными.

(Q=0,15222)

Задача 51

В условиях задачи 50 безопасность перевозки могут нарушить прочие случайные факторы, вероятность (риск) появления которых q_4=0,1. Какова вероятность Q того, что во время перевозки пестицидов будет действовать хотя бы один из опасных факторов (Q-риск перевозки)?

(Q=0,237)

Задача 52

При строительстве свиноводческого комплекса вероятность несчастного случая при проведении механизированных работ равна q_1 ; при возведении капитальной конструкции равна q_2 ; при пользовании электроэнергией равна q_3 ; из-за неосмотрительности персонала равна q_4; в силу действия других факторов $–q_5$. Какова вероятность Q несчастного случая при строительстве?

($Q=1-(1-q_1)\cdot(1-q_2)\cdot(1-q_3)\cdot(1-q_4)$)

Задача 53

Вероятности превышения вредными веществами своих предельно допустимых концентраций в воздухе рабочей зоны машинно-тракторной площадки равны: аммиаком-0,2; ацетоном-0,1; бензином-0,15; гексахлораном-0,05; диоксидом кремния-0,1.Каков риск Q работы на данном рабочем месте (т.е. вероятность того, что хотя бы по одному виду вредных веществ будет обнаружено превышение ПДК)?

(Q=0,47674)

Задача 54

Вероятность (риск) нарушения в хозяйстве безопасности хранения химикатов равна 0,15; вероятность (риск) нарушение отпуска химикатов равно 0,1; риск перевозки равен 0,05; риск при их применении равен 0,2. Каков риск Q обращения с химикатами в данном хозяйстве?

(Q=0,4186)

§4. Смешанное соединение

4.1 Методические указания

Задача 55

Для очистки сточных вод (схема 15) установлены два фильтра грубой очистки R_1 и R_2,работающие параллельно, и фильтр F тонкой очистки. Вероятность того, что R_1 не выйдет из строя равна $p_1=0,9$; для R_2 эта вероятность равна $p_2=0,75$, а для фильтра F - $p_F=0,95$.Какова вероятность P того, что жидкость в водоём A будет подаваться полностью очищенной? Все элементы работают и отказывают независимо друг от друга.

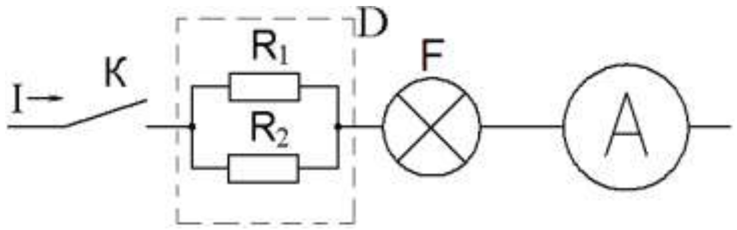

Схема 15.

Решение.

Обозначим события :

D- жидкость прошла через блок D (блок D сработал)

F- жидкость прошла через фильтр F (фильтр не вышел из строя)

R_1-работает фильтр R_1

R_2- работает фильтр R_2

G- очистная схема работает (очищенная жидкость подаётся в водоём A) .

Очевидно,что $G=DF$; $D=R_1+R_2$ (т.к. пройти через блок D это всё-равно что пройти хотя бы по одной ветке:R_1 или R_2).Имеем:

$P=P(G)=P(DF)=$(в силу независимости)$=P(D)P(F)=(0,9+0,75-0,9\cdot 0,75)\cdot 0,95=0,92625$.

Ответ: $P=0,92625$.

Задача 56

В учреждении имеются два аварийных выхода. Вероятность того, что в случае аварии первый выход будет свободным равна $p_1=0,8$; для второго выхода такая вероятность равна $p_2=0,7$. Какова вероятность того, что в случае аварии: 1) хотя бы один из выходов окажется свободным (надежность P эвакуационных выходов); 2) свободным будет только первый выход; 3) свободным будет только второй выход; 4) ни один из выходов не будет свободным (риск невозможности эвакуации); 5) хотя бы один из выходов будет блокирован; 6) свободным будет ровно один выход?

Решение.

Обозначим события:

A - в случае аварии первый выход будет свободным;

$\overline{A}$ - первый выход будет блокирован;

B - в случае аварии второй выход будет свободным;

$\overline{B}$ - второй выход будет блокирован;

A+B - хотя бы один из выходов будет свободным;

$\overline{A}+\overline{B}$ - хотя бы один из выходов будет блокирован;

$A\cdot\overline{B}$ - свободным будет только первый выход;

$\overline{A}\cdot B$ - свободным будет только второй выход;

$A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B$ - ровно один выход будет свободным;

$\overline{A} \cdot \overline{B}$- оба выхода блокированы (эвакуация невозможна в штатном порядке).

Так как события А и В можно считать независимыми, то везде пользуемся формулой (17). Кроме того очевидно:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}2;\ P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0{,}3.$$

1) Р=Р(А+В)=(по формуле (13))=Р(А)+Р(В)-Р(АВ)=0,8+0,7-

-$0{,}8 \cdot 0{,}7$=0,94;

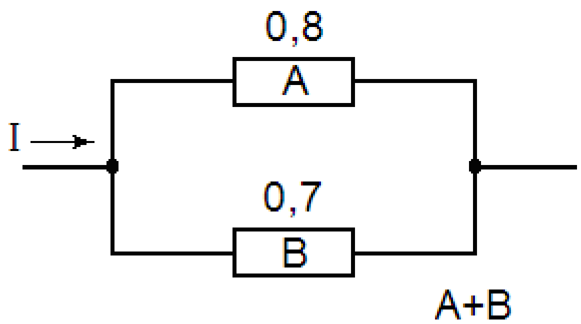

Схема 16 – структурно-логическая схема пункта 1).

2) $P(A \cdot \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}24$;

3) $P(\overline{A} \cdot B) = P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}14$;

4) $P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$;

5) $P(\overline{A} + \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cdot \overline{B})$=0,2+0,3-0,06=0,44;

6) $P(A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B)$=(так как события $A \cdot \overline{B}$ и $\overline{A} \cdot B$ несовместны то по формуле (15) получим:)=$P(A \cdot \overline{B}) + P(\overline{A} \cdot B)$=0,24+0,14=0,38.

Задача 57

В учреждении имеются три аварийных независимых друг от друга выхода: R_1, R_2, R_3 с вероятностями (надежностями) остаться при аварии работоспособными соответственно p_1=0,9; p_2=0,8; p_3=0,7. Какова вероятность того, что в случае аварии: 1) все выходы будут заблокированы (риск Q невозможности эвакуации в штатном порядке); 2) хотя бы один из выходов будет свободен (P); 3) ровно один из выходов будет свободным; 4) ровно два выхода будут свободны; 5) все три выхода будут свободны?

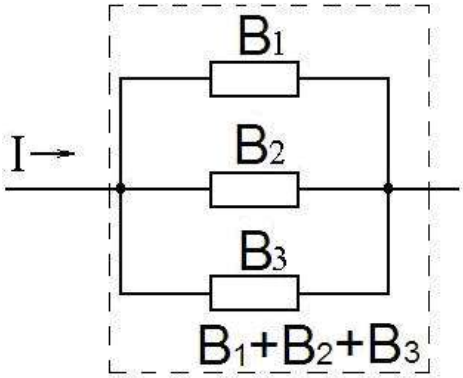

Схема 17 – структурно-логическая схема пункта 1)

Решение.

Обозначим события:

B_1 – срабатывание R_1; $\overline{B}_1$ - отказ R_1;

B_2 – срабатывание R_2; $\overline{B}_2$ - отказ R_2;

B_3 – срабатывание R_3; $\overline{B}_3$ - отказ R_3;

G – схема работает, то есть хотя бы один выход свободен;

$\overline{G}$ - отказ схемы, то есть все выходы заблокированы.

$B_1 + B_2 + B_3$ - срабатывание хотя бы одного элемента;

$\overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot \overline{B}_3$- отказ всех элементов (все выходы заблокированы);

Так как $\overline{G} = \overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot \overline{B}_3$, события B_1, B_2, B_3 независимы в совокупности и, согласно (25), q_i=1-p_i, то

1) $Q = P(\overline{G}) = P(\overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot \overline{B}_3) = P(\overline{B}_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(\overline{B}_3) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 =$
$= (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) = (1 - 0{,}9)(1 - 0{,}8)(1 - 0{,}7) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}006,$

2) $P = P(G) = 1 - P(\overline{G}) = 1 - Q = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 1 - 0{,}006 = 0{,}994 \ (= 99{,}4\%)\ldots$

3) $B_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot \overline{B}_3 + \overline{B}_1 \cdot B_2 \cdot \overline{B}_3 + \overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot B_3$ - ровно один выход останется свободным. С учетом (15) и (22) получаем:

$$P(B_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot \overline{B}_3 + \overline{B}_1 \cdot B_2 \cdot \overline{B}_3 + \overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot B_3) = P(B_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot \overline{B}_3) + P(\overline{B}_1 \cdot B_2 \cdot \overline{B}_3) +$$
$$+ P(\overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot B_3) = P(B_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(\overline{B}_3) + P(\overline{B}_1) \cdot P(B_2) \cdot P(\overline{B}_3) +$$
$$+ P(\overline{B}_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(B_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 =$$
$$= 0{,}054 + 0{,}024 + 0{,}014 = 0{,}092;$$

4) $B_1 \cdot B_2 \cdot \overline{B}_3 + B_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot B_3 + \overline{B}_1 \cdot B_2 \cdot B_3$ - ровно два выхода останутся свободными. С учетом (15) и (22) получаем:

$$P(B_1 \cdot B_2 \cdot \overline{B}_3 + B_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot B_3 + \overline{B}_1 \cdot B_2 \cdot B_3) = P(B_1 \cdot B_2 \cdot \overline{B}_3) + P(B_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot B_3) +$$
$$+ P(\overline{B}_1 \cdot B_2 \cdot B_3) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(\overline{B}_3) + P(B_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(B_3) +$$
$$+ P(\overline{B}_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 =$$
$$= 0{,}216 + 0{,}126 + 0{,}056 = 0{,}398;$$

5) $B_1 \cdot B_2 \cdot B_3$- все три выхода свободны

$$P(B_1 \cdot B_2 \cdot B_3) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504.$$

Ответ: 1) P=0,994; 2) Q=0,006; 3) 0,092; 4) 0,398; 5) 0,504.

Задача 58

Некоторую работу оператор может выполнить с помощью любого из двух независимо работающих друг от друга роботов R и L при условии исправности всех их систем управления, состоящих их блокировочных устройств $R_1(L_1)$, аварийного останова $R_2(L_2)$ средств отображения информации $R_3(L_3)$ и органов подачи команд $R_4(L_4)$. Вероятности их отказов соответственно равны: $r_1=0{,}02$; $r_2=0{,}08$; $r_3=0{,}04$; $r_4=0{,}05$ и $l_1=0{,}025$; $l_2=0{,}035$; $l_3=0{,}045$; $l_4=0{,}055$. Какова вероятность P того, что данная работа будет выполнена?

Решение.

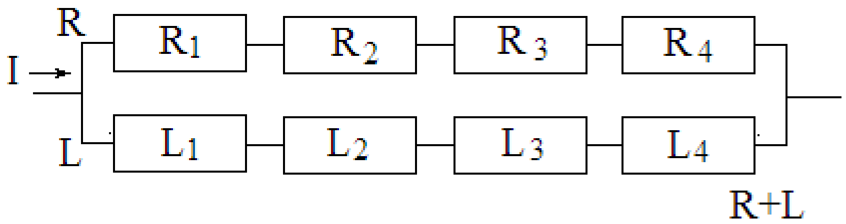

Схема 18

Событие G – работа будет выполнена;

Событие R – исправен робот R;

Событие L – исправен робот L;

Очевидно $R=R_1R_2R_3R_4$; $L=L_1L_2L_3L_4$; $G=R+L$.

Для надежностей роботов R и L получаем:

$$P(R)=P(R_1R_2R_3R_4)=P(R_1)P(R_2)P(R_3)P(R_4)=(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)(1-r_4)=$$
$$=0{,}98\cdot 0{,}97\cdot 0{,}96\cdot 0{,}95\approx 0{,}8669;$$

$$P(L)=P(L_1L_2L_3L_4)=P(L_1)P(L_2)P(L_3)P(L_4)=(1-l_1)(1-l_2)(1-l_3)(1-l_4)=$$
$$=0{,}975\cdot 0{,}965\cdot 0{,}955\cdot 0{,}945\approx 0{,}8491$$

$$P(G) = P(R + L) = P(R) + P(L) - P(RL) = P(R) + P(L) - P(R)P(L) =$$
$$= 0{,}8669 + 0{,}8491 - 0{,}8669 \cdot 0{,}8491 = 0{,}9799 \approx 0{,}98$$

Ответ: $P \approx 0{,}98$.

При технических авариях и катастрофах возникают поражения персонала как отдельными факторами: ожоги, отравления, электротравмы, механические и осколочные повреждения, импульсные ускорения, электромагнитные воздействия и т.д., так и их комбинациями (то есть двумя и более факторами). По разным причинам комбинированное поражение зачастую остается нераспознанным, например по причине оказания пострадавшему экстренной помощи по наиболее явному признаку какого-либо отдельного фактора. При этом поражающие действия других наложившихся факторов не столь заметны и могут остаться непролеченными. Отсюда ясна важность вычисления вероятности (риска) комбинированного поражения, исходя лишь только из очевидной статистики поражения отдельными факторами.

Задача 59

При авариях некоторого типа на химических комплексах признаки отравления выявляются у 30% персонала, тепловые ожоги у 20% и механические повреждения у 10% работавших. Какова вероятность P_0 остаться работнику невредимым? Каков риск (вероятность) Q_0 получить хотя бы одно повреждение? Рассчитать риски поражения $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ - ровно одним, соответственно, двумя, тремя, …, ровно n факторами.

Рассчитать риск Q_k комбинированного поражения (т.е. двумя и более факторами) и риск Q_{kt} тяжелокомбинированного поражения (т.е. тремя и более факторами). Составить таблицу рисков для данного типа аварии.

Решение

Если события A,B,C означают оказаться неповрежденным, соответственно отравлением, ожогом, механическими воздействиями, то $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ означают быть пораженным соответственного вида фактором. По условию риски поражения данными факторами равны: $q_1 = P(\overline{A}) = 0{,}3;\ \ q_2 = P(\overline{B}) = 0{,}2;\ \ q_3 = P(\overline{C}) = 0{,}1,$ а для показателей безопасности для данных факторов получим:

$$P(A) = p_1 = 1 - q_1 = 0{,}7;$$

$$P(B) = p_2 = 1 - q_2 = 0{,}8;$$

$$P(C) = p_3 = 1 - q_3 = 0{,}9.$$

Следующие события означают:

S_0=ABC – работник останется неповрежденным;

R – работник получит хотя бы одну травму (случай суммарного риска); Очевидно, $R = \overline{S_0}$;

S_1 – работник получит поражение ровно одним фактором;

$\overline{A}BC$ - поражен только отравлением;

$A\overline{B}C$ - поражен только ожогом;

$AB\overline{C}$ - поражения только механические. Эти три события несовместны и, очевидно, $S_1 = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$.

S_2 – работник получит поражение ровно двумя факторами. Очевидно, $S_2 = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C}$;

$S_3=\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ - получение поражения ровно тремя факторами;

$S_4=S_5=\ldots=S_n=\ldots=\varnothing$ - невозможны из-за отсутствия по условию других факторов. $P(S_4)=P(S_5)=\ldots=P(S_n)=\ldots=0$;

К – получить комбинированное поражение (т.е. двумя и более факторами). Очевидно, $K=\overline{(S_0+S_1)}$, или $\overline{K}=S_0+S_1$.

Считая A,B,C независимыми в совокупности событиями, по формуле (22) получим:

$$P_0=P(S_0)=P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0.9=0{,}504(\approx 50\%).$$

С учетом формулы (16) получим:

$$Q_0=P(R)=P(\overline{S}_0)=1-P(S_0)=1-P_0=1-0{,}504=0{,}496(\approx 49{,}6\%).$$

С учетом (15) и (22) получим:

$$Q_1=P(S_1)=P(\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C})=P(\overline{A}BC)+P(A\overline{B}C)+P(AB\overline{C})=$$
$$=P(\overline{A})P(B)P(C)+P(A)P(\overline{B})P(C)+P(A)P(B)P(\overline{C})=$$
$$=0{,}3\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9+0{,}7\cdot 0{,}2\cdot 0{,}9+0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1=0{,}216+0{,}126+0{,}056=0{,}398$$
$$Q_2=P(S_2)=P(\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A}\overline{B}C)+P(\overline{A}B\overline{C})+P(A\overline{B}\overline{C})=$$
$$=P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})=$$
$$=0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}9+0{,}3\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1+0{,}7\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}054+0{,}024+0{,}014=0{,}092$$
$$Q_3=P(S_3)=P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}006(\approx 0{,}6\%).$$
$$Q_4=Q_5=\ldots=0.$$

Очевидно, $Q_k=P(S_2+S_3+S_4+\ldots)=P(S_2)+P(S_3)+P(S_4)+\ldots=$
$=Q_2+Q_3+Q_4+\ldots=0{,}092+0{,}006+0+\ldots=0{,}098$, или, что проще:

$$Q_k = P(K) = 1 - P(\overline{K}) = 1 - P(S_0 + S_1) = 1 - (P(S_0) + P(S_1)) =$$

$$= 1 - P(S_0) - P(S_1) = 1 - P_0 - Q_1 = 1 - 0{,}504 - 0{,}398 = 0{,}098 (\approx 9{,}8\%).$$

$$Q_{kt} = P(S_3 + S_4 + S_5 + ...) = P(S_3) + P(S_4) + P(S_5) + ... = P(S_3) = 0{,}006 (\approx 0{,}6\%).$$

Таблица рисков и защищенностей данного типа аварий

Риски поражений и показатели уровня защищенности	Вероят-ностное значение	В процентах
Итоговый показатель защищенности от всех поражений P_0	0,504	50,4
Защищенность от отравления P_1	0,7	70
Защищенность от ожогов термических	0,8	80
Защищенность от механических травм	0,9	90
Суммарный риск поражения Q_0	0,496	49,6
Риск отравления q_1	0,3	30
Риск термоожога q_2	0,2	20
Риск механических травм q_3	0,1	10
Риск однофакторного поражения Q_1	0,398	39,8
Риск двухфакторного поражения Q_2	0,092	9,2
Риск трехфакторного поражения Q_3	0,006	0,6
Риск комбинированного поражения Q_k	0,098	9,8
Риск тяжелого комбинированного пора-жения Q_{kt}	0,006	0,6

Задача 60

Технологический комплекс по очистке и обогащению полуфабриката I и получению готового продукта на схеме 19 состоит из двух параллельных поточных линий C_1 и C_2 и блока B_2 параллельно работающих аппаратов R_7, R_8, R_9.

Найти вероятность P получения готового продукта при прохождении обрабатываемого полуфабриката I при транслировании его из точки M_1 в точку M_2. Надежности элементов p_i даны на схеме. Отказы элементов независимы друг от друга.

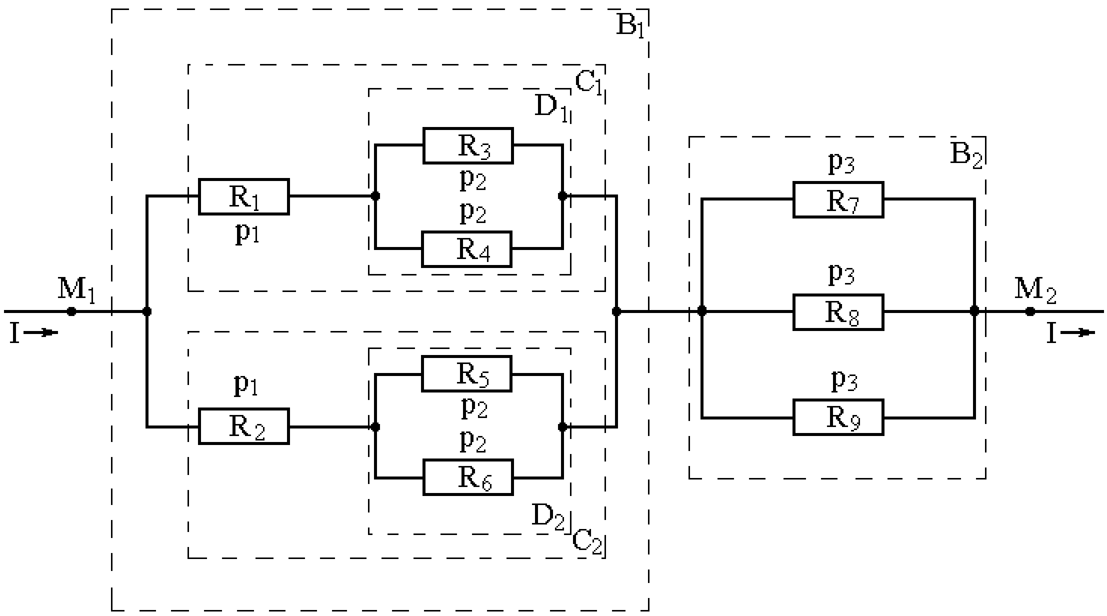

Схема 19.

Решение:

$$P = P(B_1 \cdot B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2) = [P(C_1 + C_2)] \cdot [1 - Q(B_2)] =$$
$$= [P(C_1) + P(C_2) - P(C_1) \cdot P(C_2)] \cdot [1 - q(R_7) \cdot q(R_8) \cdot q(R_9)] =$$
$$= | \text{поскольку } P(C_1) = P(C_2) | = [2 \cdot P(C_1) - P^2(C_1)] \cdot [1 - q_3^3] =$$

$$=[2\cdot P(R_1D_1)-P^2(R_1D_1)]\cdot[1-(1-p_3)^3]=$$
$$=[2\cdot P(R_1)\cdot P(D_1)-P^2(R_1)\cdot P^2(D_1)]\cdot[1-(1-p_3)^3]=$$
$$=[2\cdot p_1\{1-Q(D_1)\}-p_1^2\{1-Q(D_1)\}^2]\cdot[1-(1-p_3)^3]=$$
$$=[2\cdot p_1\{1-q_2\cdot q_2\}-p_1^2\{1-q_2\cdot q_2\}^2]\cdot[1-(1-p_3)^3]=$$
$$=[2\cdot p_1\{1-(1-p_2)^2\}-p_1^2\{1-(1-p_2)^2\}^2]\cdot[1-(1-p_3)^3]=$$
$$=p_1\{1-(1-p_2)^2\}[2-p_1\{1-(1-p_2)^2\}]\cdot[1-(1-p_3)^3].$$

Задача 61

Найти вероятность P выпуска продукции технологическим комплексом (надежность P комплекса), изображенного на схеме 20, имеющего m параллельных поточных линий, каждая из которых состоит из n элементов, если все элементы имеют одинаковую надежность p и отказывают независимо друг от друга.

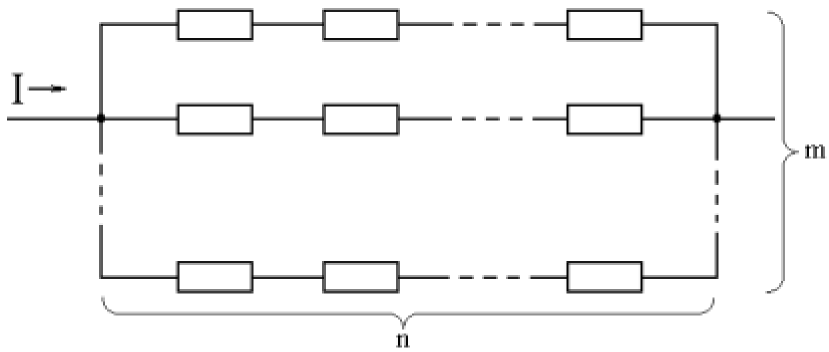

Схема 20.

Решение:

Надежность P_i отдельной линии – строки равна $P_i=p^n$, $i=\overline{1,m}$. Вероятность Q_i отказа линии – строки равна:

$$Q_i=1-P_i=1-p^n, i=\overline{1,m}.$$

Вероятность отказа Q всей схемы (всего комплекса) равна:

$$Q=Q_1\cdot Q_2\cdot\ldots\cdot Q_m=[1-p^n]^m.$$

Надежность схемы (комплекса):

$$P = 1 - Q = 1 - [1 - p^n]^m.$$

4.2. Задачи для самостоятельного решения

Ниже в задачах 49-70 все элементы отказывают или безопасно срабатывают независимо друг от друга.

Задача 62

На схеме 15 вероятность невыхода из строя фильтра F равна p_F=0,9. Надежности элементов R_1 и R_2 равны соответственно 0,8 и 0,7. Какова вероятность P снабжения системы A чистой жидкостью?

(Ответ: P=0,846)

Задача 63

Какова вероятность P снабжения очищенной жидкостью системы A на схеме 15 при открывании крана K, если даны вероятности отказов q_1=0,3; q_2=0,4 и надежность фильтра p_F=0,96?

(Ответ: P=0,8448)

Задача 64

На схеме 15 дано: p_1=0,9; q_2=0,12; p_F=0,97. Какова вероятность P снабжения системы A при открывании крана K? Какова вероятность Q отказа схемы?

(Ответ: P=0,95836; Q=0,04164)

Задача 65

На схеме 15 дано: p_1=p_2=0,85; q_F=0,01. Найти вероятность P снабжения системы A при открывании крана K. Найти вероятность Q отказа схемы.

(Ответ: $P \approx 0,9677$; $Q \approx 0,0323$)

Задача 66

На схеме 15 надежности $p_1=p_2=p$. Надежность фильтра F равна p_F. Выразить надежность P и показатель отказов Q схемы через параметры p, p_F и через параметры q и q_F (где $q=1-p$; $q_F=1-p_F$).
(Ответ: $P=[1-(1-p)^2]\cdot p_F$; $Q=1-[1-(1-p)^2]\cdot p_F$; $P=(1-q^2)(1-q_F)$; $Q=q_F(1-q^2)+q^2$)

Задача 67

Рассчитать надежность P комплекса на схеме 19, приняв:
а) $p_1=p_2=p_3=0{,}9$; б) $p_1=p_2=p_3=0{,}5$. Сравнить результаты.

*** Задача 68**

На схеме эвакуации 21 надежность каждого из пяти участковравна p. Найти надежность P всей схемы. Указание: воспользоваться формулой (14).

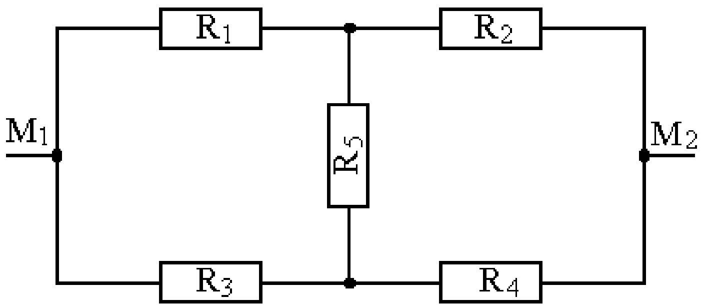

Схема 21.

(Ответ: $P=2p^2+2p^3-5p^4+2p^5$)

*** Задача 69**

Если в схеме 20 задачи 61 положить n=m, то для надежности всей цепи получим:

$$P=1-(1-p^n)^n. \qquad (36)$$

Выяснить, что будет происходить с надежностью P в формуле (36), когда число n будет неограниченно увеличиваться. Указание: произвести логарифмирование и воспользоваться правилом Лопиталя.

Задача 70

При авариях некоторого типа на нефтегазодобывающем комплексе возникают тепловые ожоги у 25% персонала; отравления – у 20%; механические повреждения – у 15% персонала. Какова вероятность P не получить повреждений (итоговый показатель безопасности)? Каков риск Q получить хотя бы одно повреждение? Составить таблицу рисков и защищенностей при данном типе аварий.

Задача 71

На выезде из города имеются две автозаправки: A и B. Вероятность функционирования для первой P(A) равна 0,8; для второй P(B)=0,6. Какова вероятность того, что:

1) обе заправки работают;

2) работает хотя бы одна;

3) первая не работает;

4) вторая не работает;

5) обе не работают;

6) хотя бы одна не работает;

7) работает только первая;

8) работает только вторая;

9) не работает только первая;

10) не работает только вторая;

11) работает ровно одна;

12) не работает ровно одна;

13) работают ровно две?

Ответ: 1) P(AB)=0,48; 2) P(A+B)=0,92; 3) $P(\overline{A}) = 0{,}2$;

4) $P(\overline{B}) = 0{,}4$; 5) $P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 0{,}08$; 6) $P(\overline{A} + \overline{B}) = 0{,}52$;

7) $P(A \cdot \overline{B}) = 0{,}32$; 8) $P(\overline{A} \cdot B) = 0{,}12$; 9) $P(\overline{A} \cdot B) = 0{,}12$;

10) $P(A \cdot \overline{B}) = 0{,}32$; 11) $P(A\overline{B} + \overline{A}B) = 0{,}44$;

12) $P(A\overline{B} + \overline{A}B) = 0{,}44$; 13) P(AB)=0,48.

Задача 72

В цехе имеются три сварочных аппарата, для которых вероятности быть в исправном (безопасном) состоянии составляют соответственно p_1=P(A)=0,9; p_2=P(B)=0,8; p_3=P(C)=0,7. Какова вероятность того, что в данный момент:

1) исправны все аппараты;

2) исправен хотя бы один;

3) исправен ровно один;

4) исправны ровно два;

5) исправны хотя бы два;

6) неисправен хотя бы один;

7) неисправен ровно один;

8) неисправны ровно два;

9) все неисправны?

Ответ: 1) P(ABC)=0,504; 2) P(A+B+C)=0,994;

3) $P(A\overline{B}\,\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\,\overline{B}C) = 0{,}092;$

4) $P(A\overline{B}\,\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\,\overline{B}C) = 0{,}092;$

5) $P(A\overline{B}\,\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\,\overline{B}C) = 0{,}092;$

6) 1- P(ABC)=0,496;

7) $P(\overline{A}BC) + P(A\overline{B}C) + P(AB\overline{C}) = 0{,}398;$

8) $P(\overline{A}\,\overline{B}C) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(A\overline{B}\,\overline{C}) = 0{,}092;$

9) $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 0{,}006$

Литература

1. В. Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2003.
2. В. Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 2003.
3. Г. В. Горелова, И. А. Кацко. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением EXCEL. Ростов-на-Дону, Феникс, 2006.
4. А. Н. Бородин. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. СПб.: Лань, 2002.
5. В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1986.
6. А. И. Карасев. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Статистика, 1979.
7. Г. И. Агапов. Задачник по теории вероятностей. М.: Высшая школа, 1986.
8. Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. Теория вероятностей и её инженерные приложения. М.: Наука, 1988.
9. Г. Секей. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике: Пер. с англ. М.: Мир, 1990.

10 А. С. Касаткин, М. В. Немцов. Электротехника. М.: Высшая школа, 1999.

Учебное издание

Захаров Игорь Петрович

ЗАДАЧИ

на теоремы теории вероятностей
(методические указания)

для студентов-бакалавров по направлению
280700 – Техносферная безопасность

Редактор Павлютина И.П.

Подписано к печати 20.11.2012. Формат 60 х 84 $^{1}/_{16}$. Бумага писчая.
Усл. п. л. 3,72. Тираж 100 экз. Изд.№2248.

Издательство Брянская государственная сельскохозяйственная академия
243365, Брянская обл. Выгоничский р-он, с.Кокино, Брянская ГСХА